Εισαγωγή στις Διαφορικές Εξισώσεις - Πρόοδος Ι

Τετάρτη 1-4-2015, 2-4 μ.μ.

1. Να επιλυθούν τα προβλήματα αρχικών τιμών

$$y' - \frac{y}{x}logy = -\frac{y}{2logy}, \quad y(-1) = e^2.$$

$$y' = -\frac{(1+y)^2}{x - x^2 + xy}, \quad y(1) = 1.$$

$$siny(1 - e^{-x})y' = -cosy, \quad y(0) = \pi/2.$$

$$(y-1)y' + xy^2 + y^2 + x + 1 = 0 \quad y(2) = 0.$$

2. Να αποδειχθεί ότι οι λύσεις των διαφορικών εξισώσεων

$$y' + ylog(\frac{5}{2} + sinx) = \frac{cosx}{(x+1)^2}, \quad x \geq 0$$

$$y' + ye^{x^2+x+1} = \frac{xsinx}{x^2+1}, \quad x \geq 0$$

τείνουν προς το μηδέν για $x \to +\infty$.

3. Αν c, b είναι θετικές σταθερές, να αποδειχθεί κάθε λύση της εξίσωσης

$$y' = y(b - cy), \quad x \geq 0$$

με $y(0) = y_0 > 0$ παραμένει θετική για $x > 0$ και τείνει προς θετικό όριο για $x \to +\infty$.

4. Να εξετασθούν ως προς την ύπαρξη και το μονοσήμαντο τα προβλήματα αρχικών τιμών

$$y'(x) = x^2cosy + ysin^2x \quad y(0) = 1.$$

$$y'(x) = 4x^2cos2y + y^2sin2x \quad y(0) = 1.$$

5. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$(x^2+1)y'' - 2xy' + 2y = (x^2+1)^2, x > 0; \quad y(1) = 1, y'(1) = 0$$

με το δεδομένο ότι η αντίστοιχη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση δέχεται μια λύση της μορφής $y_1(x) = x + a, x > 0$.

6. Να εξετασθεί η αλήθεια των προτάσεων:

(i) Αν (E_0) είναι μια ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση $n-$τάξης, και $x_0 \in I$, τότε υπάρχει βασικό σύνολο λύσεων $S := \{y_1, ..., y_n\}$ της (E_0) με $W(y_1, ..., y_n)(x_0) = 2015$.

(ii) Αν S_1, S_2 είναι βασικά σύνολα λύσεων μιας ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης $n-$τάξης, τότε είναι $W(S_1)(x) = cW(S_2)(x), x \in I$ για κάποιο $c \neq 0$.

(iii) Αν $S = \{y_1, y_2\}$ είναι ένα βασικό σύνολο λύσεων μιας ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης β′ τάξης τότε το σύνολο $S' = \{ky_1 + my_2, ky_1 - my_2\}, km \neq 0$ είναι επίσης ένα βασικό σύνολο λύσεων.

(iv) Υπάρχουν S_1, S_2 σύνολα λύσεων της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης $n-$ τάξης, των οποίων οι συναρτήσεις $W(S_1)(x), W(S_2)(x), x \in I$ έχουν n ακριβώς σημεία τομής.

7. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$[y + x(x^2 + y^2)^2]dx + [y(x^2 + y^2)^2 - x]dy = 0$$

αφού πρώτα βρεθεί ένας ολοκληρωτικός παράγοντας της μορφής $\rho(x, y) = (x^2 + y^2)^m$ όπου m είναι ακέραιος.

8. Αν $b : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση και $\{sinx, cosx\}$ είναι ένα βασικό σύνολο λύσεων της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης β′ τάξης $L(y) = 0$ με $a_2 = 1$, να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών $L(y) = b(x), y(1) = 1, y'(1) = 1$.